1870

Betrachtung

der

Niveauflächen und des hydrostatischen Druckes

einer

um zwei oder mehrere vertikale Axen rotirenden Flüssigkeit.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Karl Wilhelm Heinrich Eberhard,
Gymnasiallehrer zu Rostock.

Rostock.
Druck von Adler's Erben.
1870.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0071

Betrachtung der Niveauflächen und des hydrostatischen Druckes einer um zwei oder mehrere vertikale Axen rotirenden Flüssigkeit.

Es befinde sich auf der horizontalen Drehscheibe A (Fig. 1) ein mit einer tropfbaren Flüssigkeit angefülltes cylindrisches Gefäß so, daß seine Axe mit der Axe der Drehscheibe zusammenfällt, und diese Scheibe A sei so auf einer zweiten Drehscheibe D befestigt, daß sie sich zwar ungehindert um ihre eigene Axe drehen kann, aber sonst den Umdrehungen der Scheibe D folgen muß. Auf der Mitte dieser Scheibe D befinde sich ferner der obere Theil B einer Doppelscheibe, die von den Drehungen der Scheibe D unabhängig ist, wie aus dem der Fig. 1 untergezeichneten Aufriß zu ersehen ist.

Es sei dann ferner die Scheibe D mit dem oberen Theil C einer in dem Gestell HG befindlichen zweiten Doppelscheibe durch eine Schnur in der in Fig. 1 angegebenen Weise verbunden, so daß durch die Drehung von C auch die Scheibe D in Bewegung gesetzt wird; sodann sei die untere Scheibe von C mit der unteren von B und endlich der obere Theil von B mit der Scheibe A in Verbindung gesetzt.

Dreht man nun mittelst der Kurbel K die Scheiben bei C, dann wird durch die untere Schnur die Doppelscheibe B und durch diese die Scheibe A, also auch der Cylinder, in Rotation versetzt; durch die obere Schnur dagegen wird die Scheibe D und um sie, bezüglich um B, die Scheibe A zur Drehung gebracht.

Es ist aus den angegebenen Verhältnissen ersichtlich, daß die in dem der Scheibe A aufgesetzten cylindrischen Gefäße befindliche Flüssigkeit eine Drehung um 2 vertikale Axen erleidet.

Unterwirft man die Flüssigkeit in ähnlicher Weise einer 3fachen, 4fachen, 5fachen . . . . nfachen Drehung, dann wird dieselbe, wie wir sehen werden, eine bestimmte Gestalt an ihrer Oberfläche annehmen, die während der Drehungen bestehen bleibt, wenn sie auch eine gewisse Wanderung antritt.

§ 1.

Um nun zunächst eine Gleichung für eine solche Niveaufläche bei einer Rotation um 2 vertikale Axen, nämlich um die Axen, deren Projection B und A (Fig. 2) sind, aufzustellen, denken wir uns einen Schnitt senkrecht zu den beiden Axen ausgeführt. Ein solcher werde durch Fig. 2 dargestellt. Darin zeige A die Anfangsstellung des Cylinders und A^1 die Stellung desselben, nachdem die Drehungen die Zeit t gedauert haben, an.

Bei unserer Betrachtung legen wir zwei rechtwinklige Coordinatensysteme zu Grunde; ein festes XBY und ein bewegliches X^1BY^1, welches denselben Ursprung B mit dem ersteren, aber zur Abscissenaxe die mit der Zeit t sich drehende Axe BA^1 hat.

Die Z Axe ist bei beiden Coordinatensystemen dieselbe, nämlich rechtwinklich zu der Drehungsebene.

Die Grade BA^1 macht mit der Axe BX den W. $\alpha = f(t)$; haben wir daher die Gleichung der Niveaufläche in Bezug auf das bewegliche System X^1BY^1 festgestellt, so können wir dieselbe leicht für das System XBY transformiren; werden aber dann in der Gleichung die Zeitvariable t aufzunehmen haben.

Das Massentheilchen dm bei M (Fig. 2) werde von B aus an dem Arm $BM = r_1$ gedreht mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 und von A^1 aus an dem Arm $A^1M = r_2$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2; dann

erhält dm erstens die Geschwindigkeit $v_1 = r_1 \omega_1$ in der Richtung der Tangente ML und zweitens die Geschwindigkeit $v_2 = r_2 \omega_2$ in der Richtung von MN. Diese beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 sind offenbar gleich der resultirenden Geschwindigkeit $v_0 = r_0 \omega_0$ in der Richtung MP, die senkrecht ist zu dem noch zu bestimmenden Arm $MG = r_0$.

Es ist nun $\mathfrak{W}.\ LMP = \mathfrak{W}.\ BMG = \zeta$

und $\mathfrak{W}.\ NMP = \mathfrak{W}.\ A^1MG = \mathfrak{W}.\ LPM = \varepsilon$.

Daher haben wir

$$\frac{ML}{PL} \text{ oder } \frac{r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \zeta} \ldots (1$$

und ebenso

$$\frac{A^1C}{r_2} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin (b + \zeta)}; \quad \frac{BC}{r_1} = \frac{\sin \zeta}{\sin (b + \zeta)}.$$

Daher durch Division

$$\frac{r_1 A^1C}{r_2 BC} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \zeta} \ldots (2$$

mithin aus 1) und 2)

$$\frac{r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} = \frac{r_1 A^1C}{r_2 BC} \text{ oder } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{A^1C}{BC} \ldots (3$$

d. h. der resultirende Drehungsarm $MG = r_0$ theilt die Verbindungslinie von B und A^1, den beiden Drehungsmittelpunkten, im umgekehrten Verhältniß der beiden an ihnen wirkenden Winkelgeschwindigkeiten.

Die Richtung des resultirenden Drehungsarmes ist demnach bestimmt.

Es kommt nun zunächst darauf an, auch die Länge desselben zu finden, oder, was dasselbe ist, den augenblicklichen Drehungsmittelpunkt festzusetzen.

Das in diesem Punkte befindliche Flüssigkeitstheilchen muß sich in Ruhe befinden. Der einzige Punkt aber, wo dies möglich ist, ist C; denn da die Drehung um A^1 und B in dem Sinne der beiden Pfeile (siehe Fig. 3) geschieht, so muß $A^1C \,.\, \omega_2 = BC \,.\, \omega_1$ sein, damit die beiden Drehungen sich aufheben.

Es ist aber nach (3

$$\frac{A^1C}{BC} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \text{ daher } A^1C \,.\, \omega_2 = BC\,\omega_1.$$

Hätte man einen Punkt außerhalb der Grade A^1B z. B. G in Fig. 4 angenommen, dann würde eine Resultante in der in der Fig. angegebenen Weise entstanden sein, und es hätte also das in G befindliche Molekülchen dm nicht in Ruhe sein können.

Es folgt daher, daß r_0 nur $= MC$ (Fig. 2) sein kann.

Es bleibt uns nun noch übrig, die in dem Ausdruck $r_0 \omega_0$ vorkommende resultirende Winkelgeschwindigkeit ω_0 festzusetzen. Dies geschieht auf folgende Weise:

Setzen wir A^1B (Fig. 2) $= R_1$ dann folgt aus der Proportion $\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ sogleich:

$$\frac{R_1}{BC} = \frac{AC + BC}{BC} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2}; \quad BC = \frac{\omega_2 R_1}{\omega_1 + \omega_2} \ldots (4$$

ferner: $$\frac{R_1}{r_1} = \frac{\sin (\varepsilon + \zeta)}{\sin \beta} = \frac{\sin (\beta - b)}{\sin \beta}; \text{ oder } R_1 = \frac{r_1 \sin (\beta - b)}{\sin \beta} \ldots (5$$

mithin aus 4 und 5.

$$BC = \frac{\omega_2 r_1 \sin (\beta - b)}{(\omega_1 + \omega_2) \sin \beta} \ldots (6$$

ferner folgt aus Fig. 2

$$\frac{MP}{MN} = \frac{r_0 \omega_0}{r_2 \omega_2} = \frac{\sin (\beta - b)}{\sin \zeta} \ldots (7$$

und $$\frac{BC}{r_0} = \frac{\sin \zeta}{\sin b}$$ oder mit Hülfe von (6):

$$\frac{\omega_2 r_1 \sin (\beta - b)}{(\omega_1 + \omega_2) r_0 \sin \beta} = \frac{\sin \zeta}{\sin b} \ldots (8$$

Durch Multiplication von (7 und (8 erhält man $\frac{r_1 \omega_0}{r_2 (\omega_1 + \omega_2) \sin \beta} = \frac{1}{\sin b}$;

und daraus $\omega_0 = \frac{r_2 (\omega_1 + \omega_2) \sin \beta}{r_1 \sin b}$ oder da $r_2 \sin \beta = r_1 \sin b$ ist, $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist also gleich der Summa der beiden Winkelgeschwindigkeiten um A^1 und B.

Man kann demnach die beiden Drehungen um A^1 und B mit $r_2 \omega_2$ und $r_1 \omega_1$ ersetzen durch eine Drehung um C mit CM und der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 + \omega_2$.

§ 2.

Das Partikelchen dm wird nun von 2 Kräften afficirt, nämlich einerseits von der Centrifugalkraft in der Richtung des Radius und andererseits von seiner eignen Schwere g.

Da nun die Centrifugalkraft durch den Quotienten aus dem Quadrate der Geschwindigkeit durch den Krümmungshalbmesser angegeben wird, so haben wir den Werth für die auf dm bei M wirkende Centrifugalkraft K ausgedrückt durch die Formel: $K = \frac{r_0^2 (\omega_1 + \omega_2)^2}{r_0} = r_0 (\omega_1 + \omega_2)^2 = CM (\omega_1 + \omega_2)^2$.

Mithin sind die Componenten von K in Bezug auf unser bewegliches System $X^1 B Y^1$ (siehe Fig. 2)

in der Richtung der X^1Axe $K \cdot \cos b = CM \cos b \cdot (\omega_1 + \omega_2)^2$

" " " " Y^1 " $K \cdot \sin b = CM \sin b \cdot (\omega_1 + \omega_2)^2$

das heißt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{in der Richtung der } X^1 \text{ wirkt die Kraft } (x_1 - BC)(\omega_1 + \omega_2)^2 \ldots . \\ " \quad " \quad " \quad " \quad Y^1 \quad " \quad " \quad " \quad y_1 (\omega_1 + \omega_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \quad (9$$

In der Richtung der ZAxe wirkt nur die Schwere $(-g)$.

Die allgemeine Gleichung der Niveauflächen $\varrho \int (X dx + Y dy + Z dz) = \text{Const.}$ erhält demnach die Form:

$$\varrho \int \left[(x_1 - \overline{BC})(\omega_1 + \omega_2)^2 dx_1 + y_1 (\omega_1 + \omega_2)^2 dy_1 - g dz\right] = \text{Const.}$$

oder:

$$\varrho \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2} \left[x_1^2 + y_1^2 - 2 \overline{BC} x_1 - \frac{2 g z}{(\omega_1 + \omega_2)^2}\right] = \text{Const.}$$

worin $\overline{BC}$ den bei (4) gefundenen constanten Werth besitzt.

Transformiren wir diese Gleichung für das feste System XBY, dann haben wir zu substituiren:

$x_1 = y \sin \alpha + x \cos \alpha$; $y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha$.

Setzen wir dann zugleich:

$$\overline{BC} \cdot \cos \alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} R_1 \cos \alpha = \xi \text{ und } \overline{BC} \cdot \sin \alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} R_1 \sin \alpha = \eta$$

dann erhalten wir:

$$x^2 + y^2 - 2 \xi x - 2 \eta y - \frac{2 g z}{(\omega_1 + \omega_2)^2} = \text{Const.}$$

Den in den Werthen von ξ und η vorkommenden Winkel α können wir als $F(t)$ darstellen.

Wir finden dieselbe auf folgende Weise:

Da die Grade $A^1 B$ oder die Axe BX^1 in der Zeit t den Winkel α durchlaufen hat, so haben wir, wenn wir die zu ω_1 gehörige Umlaufszeit $= T_1$ annehmen, die Proportion:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{t}{T_1} \text{ daher } \alpha = \frac{2\pi t}{T_1} = \omega^1 t.$$

Mithin erhalten ξ und η, welche zugleich die Coordinaten des neuen Drehungsmittelpunktes in Bezug auf das feste System sind, die Werthe:

$$(10) \quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} R_1 \cos (\omega_1 t) \\ \eta = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} R_1 \sin (\omega_1 t) \end{array}\right.$$

§ 3.

Nehmen wir statt der im Vorhergehenden betrachteten 2 Drehungen um B und A^1 (Fig. 2) drei Drehungen um drei vertikale Axen an, deren Projectionen $O_1 O_2 O_3$ (Fig. 5) sein mögen, dann erhalten wir, wenn wir jetzt die Winkelgeschwindigkeiten bei O_1, O_2, O_3, resp. mit ω_1, ω_2, ω_3 und die Abstände $O_1 O_2$, $O_2 O_3$ resp. mit R_1, R_2 sowie $O_1 M$, $O_2 M$, $O_3 M$ resp. mit r_1, r_2, r_3 bezeichnen, statt $r_3 \omega_3$ und $r_2 \omega_2$ die Geschwindigkeit $MC\ (\omega_3 + \omega_2)$ von C aus und wieder statt $MC\ (\omega_3 + \omega_2)$ und $r_1\ \omega_1$ die eine Geschwindigkeit $v_0 = MC_1\ (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ von C_1 aus.

Nennen wir die Coordinaten von C_1 jetzt ξ und η und denken uns die Componenten der Centrifugalkraft gleich parallel den festen Coordinatenaxen X und Y, dann erhalten wir die Gleichung der Niveaufläche auf das feste System XYZ bezogen:

$$\varrho \int \left[(x - \xi)\ (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2\ dx + (y - \eta)\ (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2\ dy - g\,dz \right] = \text{Const.}$$

oder:

$$\varrho\ \frac{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2}{2} \left[x^2 + y^2 - 2\,\xi x - 2\eta y - \frac{2g\,z}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2} \right] = \text{Const.}$$

oder:

$$C = x^2 + y_2 - 2\xi x - 2\eta y - \frac{2g\,z}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2}.$$

In dieser Gleichung ist noch der Werth von ξ und η festzusetzen.

Aus Fig. 5 ist die Richtigkeit folgender Gleichungen ersichtlich:

$$\xi = O_1 C_1 \cos \varepsilon \quad \ldots \quad (11$$

$$\frac{O_1 C_1}{C C_1} = \frac{O_1 C_1}{O_1 C - O_1 C_1} = \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_1}$$

daher: $\dfrac{O_1 C_1 + (O_1 C - O_1 C_1)}{O_1 C_1} = \dfrac{O_1 C}{O_1 C_1} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{\omega_2 + \omega_3}$ und $O_1 C_1 = \dfrac{(\omega_2 + \omega_3)\ O_1 C}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}$ (12;

ferner ist $\cos \varepsilon = \dfrac{O_1 p^1}{O_1 C}$ . . . . (13

Aus 11 und 13 folgt: $\xi = \dfrac{O_1 C_1 \,.\, O_1 p^1}{O_1 C}$ oder mit Bezug auf 12, $\xi = \dfrac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} O_1 p^1$.(14

Es ist aber $O_1 p^1 = O_1 p + O_2 P = R_1 \cos \alpha + O_2 C \cos (\alpha + \beta)$

daher $O_1 p^1 = R_1 \cos \alpha + \dfrac{\omega_3}{\omega_2 + \omega_3} R_2 \cos (\alpha + \beta)$ (15

Ist nun wieder die zu ω_1 gehörige Umlaufszeit T_1 und die zu ω_2 gehörige T_2, dann haben wir die Proportionen $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{t}{T_1}$ d. h. $\alpha = \dfrac{2\pi t}{T_1} = \omega_1 t$.

Hätte blos die Drehung um O_1 (Fig. 4) stattgefunden, dann würde die Axe $O_2 O_3$ die Lage O_2 (O_3) erhalten haben. Nun stellt aber die Drehung um O_2 die Lage $O_2 O_3$ her, daher haben wir:

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{t}{T_1} \text{ oder } \beta = \frac{2\pi t}{T_{11}} \text{ und daher } (\alpha + \beta) = (\omega_1 + \omega_2)\ t \quad \ldots \quad (16$$

Wir erhalten demnach:

$$\xi = \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_1 \,.\, \cos (\omega_1 t) + \frac{\omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_2 \cos \left[(\omega_1 + \omega_2)\ t \right]$$

und auf ähnliche Weise:

$$\eta = \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_1 \sin (\omega_1 t) + \frac{\omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_2 \sin \left[(\omega_1 + \omega_2)\ t \right]$$

Nehmen wir nun weiter eine Rotation um 4 parallele Axen, deren Projectionen O_1, O_2, O_3, O_4, (Fig. 6) sind, an, mit den bezüglichen Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 und den Entfernungen $O_1O_2 = R_1$; $O_2O_3 = R_2$; $O_3O_4 = R_3$; dann wird offenbar:

$$C = \varrho\,(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)^2 \left[x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y - \frac{2gz}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)^2}\right]$$

und $\xi = O_1P = O_1C_1 \cdot \cos\varepsilon$ und ähnlich wie oben: $\dfrac{O_1C_2}{O_1C_1 - O_1C_2} = \dfrac{\omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{\omega_1}$;

$O_1C_2 = \dfrac{\omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}\,O_1C_1$; $\cos\varepsilon = \dfrac{O_1Q}{O_1C_1}$; $O_1Q = O_1p + O_2q^1 = R_1\cos\alpha +$ dem früheren ξ, worin jedoch ω_3, ω_2, ω_1 dem jetzigen ω_4, ω_3, ω_2 und $\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\beta)$ bezüglich dem jetzigen $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ und R_1, R_2 dem jetzigen R_2, R_3 entspricht.

Da nun $\alpha = \omega_1 t$, $\beta = \omega_2 t$, $\gamma = \omega_3 t$ ist, so haben wir:

$$\xi = \frac{\omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} \cdot R_1 \cdot \cos(\omega_1 t) + \frac{\omega_3 + \omega_4}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} \cdot R_2 \cdot \cos\left[(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$
$$+ \frac{\omega_4}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} \cdot R_3 \cdot \cos\left[(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t\right]$$

und

$$\eta = \frac{\omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} \cdot R_1 \cdot \sin(\omega_1 t) + \frac{\omega_3 + \omega_4}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} \cdot R_2 \cdot \sin\left[(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$
$$+ \frac{\omega_4}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} \cdot R_3 \cdot \sin\left[(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t\right]$$

Setzen wir dieses Verfahren fort, so werden wir schließlich für n Umdrehungen oder für eine Rotation um n vertikale Axen haben:

$$A_1)\quad \varrho\,\frac{(\Sigma\omega)^2}{2}\left[x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y - \frac{2gz}{(\Sigma\omega)^2}\right] = \text{Const.}$$

darin ist $\Sigma\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\,\omega_n$

$$\xi = \frac{1}{\Sigma\omega}\Big[\left[(\Sigma\omega) - \omega_1\right] R_1 \cos(\omega_1 t) + \left[(\Sigma\omega) - (\omega_1 + \omega_2)\right] R_2 \cos\left[(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$
$$+ \left[(\Sigma\omega) - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\right] R_3 \cos\left[(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t\right]$$
$$+ \ldots + \omega_n R_{n-1} \cos\left[(\Sigma\omega - \omega_n)t\right]\Big]$$

$$\eta = \frac{1}{\Sigma\omega}\Big[\left[(\Sigma\omega) - \omega_1\right] R_1 \sin(\omega_1 t) + \left[(\Sigma\omega) - (\omega_1 + \omega_2)\right] R_2 \sin\left[(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$
$$+ \left[(\Sigma\omega) - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\right] R_3 \sin\left[(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t\right]$$
$$+ \ldots + \omega_n R_{n-1} \sin\left[(\Sigma\omega - \omega_n)t\right]\Big]$$

Diese Gleichung A ist die allgemeine Gleichung der durch eine Rotation der Flüssigkeit um n parallele Axen entstandenen Niveaufläche.

Setzen wir die Constante $C = \varrho g c$ . . . . . (17

dann erhält die Gleichung A_1 die Gestalt:

$$A_2)\quad x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y - \frac{2g}{(\Sigma\omega)^2}(z - c) = 0.$$

Beziehen wir ferner A_2) auf ein Coordinatensystem, welches dem festen parallel ist, aber dessen Ursprung in Bezug auf dieses die Coordinaten ξ, η, o hat, dann nimmt die Gleichuug A_2, wenn wir zuvor noch $c = c + (\xi^2 + \eta^2)\ \frac{(\Sigma\omega)^2}{2g}$, (18) setzen, die einfache Gestalt an:

$$B_a)\ x^2 + y^2 - \frac{2g}{(\Sigma\omega)^2}(z - c) = o^*)$$

Diese Gleichung B_a lehrt uns Folgendes:

Jede Niveaufläche der rotirenden Flüssigkeit ist ein Rotationsparaboloid vom Parameter $\frac{2g}{(\Sigma\omega)^2}$, dessen Hauptaxe die z Axe des neuen Coordinatensystems und daher mit den n Rotationsaxen parallel ist.

Setzen wir in dieser Gleichung

$$z = c$$

so erhalten wir $x = y = o$; es giebt also c die Höhe des Scheitels des Paraboloides über der XY Ebene oder, was dasselbe ist, über der Ebene des Bodens der Flüssigkeit an.

Da nun der Parameter $\frac{2g}{(\Sigma\omega)^2}$ nicht von c abhängig ist, so folgt, **daß alle Niveauflächen, die man durch successive Veränderung von c erhält, einander congruent sind.**

Die zAxe des neuen Systems (also auch die Axe des Paraboloides) hat in Bezug auf das feste Coordinatensystem die Coordinaten ξ, η, o; allein ξ und η sind Functionen des Variablen t, **folglich wird die zuletzt gedachte neue zAxe, d. h. die Axe des Paraboloides, sich parallel mit sich fortbewegen.**

Der geometrische Ort für alle Punkte, durch welche der Fußpunkt dieser Axe geht, ist eine Curve, deren Gestalt durch die zusammengehörigen Werthe von ξ und η bestimmt wird.

§ 4.

Um die Gleichung dieser Curve in der Form $F(\xi, \eta) = o$ aufzustellen, müßte man aus den beiden Gleichungen für ξ und η in A_1) die Größe t eliminiren. Da dies allgemein nicht möglich ist, gehen wir zur Betrachtung specieller Fälle über:

Haben wir es mit einer Drehung um eine einzige Axe zu thun, dann wird, da $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 \ldots . \omega_n = o$ ist, $\xi = o$ und $\eta = o$.

D. h.: **Die Axe des Paraboloides steht fest und fällt mit der zAxe des festen Coordinatensystems zusammen.**

Ist eine Drehung um zwei Axen vorhanden, dann wird

$$\xi = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} R_1 \cos(\omega_1 t);\ \eta = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} R_1 \sin(\omega_1 t)$$

mithin $\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} R_1\right)^2$

D. h.: **Bei einer Rotation um 2 parallele Axen durchläuft der Fußpunkt der Axe der**

---

*) Dimensionen von $\frac{2g}{(\Sigma\omega)^2}$.

	Maßeneinheit	Längeneinheit	Zeiteinheit
g	0	1	— 2
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	0	0	— 1
ω^2	0	0	— 2
$\Sigma\omega^2$	0	0	— 2
mithin $\frac{2g}{\Sigma\omega^2}$	0	1	0

Rotationsparaboloide einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Ursprung der festen Coordinaten ist, und dessen Radius den Werth $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} R_1$ hat.

Bei einer Rotation um 3 Axen wird

$$(19^*)\begin{cases} \xi = \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{\omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_2 \cos\left[(\omega_1 + \omega_2) t\right] \\ \eta = \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_1 \sin(\omega_1 t) + \frac{\omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_2 \sin\left[(\omega_1 + \omega_2) t\right] \end{cases}$$

Um diese Curve, welche eine transcendente ist, zu untersuchen, könnten wir versuchen, die Maximal- und Minimal-Werthe für die Ordinate η und die Abscisse ξ aufzusuchen.

Zu dem Zwecke hätten wir den Werth der Tangente $\frac{d\eta}{d\xi}$ das eine Mal $= 0$, das andere Mal $= \infty$ zu setzen und aus diesen Werthen die Größe t zu bestimmen, um den erhaltenen Specialwerth in $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ einzusetzen. Da sich jedoch t aus dem für $\frac{d\eta}{d\xi}$ resultirenden Werthe nicht allgemein festsetzen läßt, so wollen wir uns darauf beschränken, das Maximum und Minimum für den Abstand u der Curve von dem festen Ursprung des Coordinaten aufzusuchen.

Zu dem Zwecke haben wir

$$\xi^2 + \eta^2 = u^2 = \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2}\Big[(\omega_2 + \omega_3)^2 R_1^2 + \omega_3^2 R_2^2 + 2\omega_3 (\omega_2 + \omega_3) \cdot R_1 R_2 \Big(\cos\omega_1 t \cos\big((\omega_1 + \omega_2) t\big) + \sin\omega_1 t \sin\big((\omega_1 + \omega_2) t\big)\Big)\Big]$$

$$u^2 = \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2}\Big[(\omega_2 + \omega_3)^2 R_1^2 + \omega_3^2 R_2^2 + 2\omega_3 (\omega_2 + \omega_3) R_1 R_2 \cos\omega_2 t\Big]$$

Der Werth von u erhält offenbar sein Maximum für $\cos(\omega_2 t) = 1$

D. h. für $t = 0 = T_2 = 2T_2 = 3T_2 \ldots = T_2$ (ħ)

und sein Minimum für $\cos(\omega_2 t) = -1$

D. h. für $t = \frac{1}{2} T_2 = \frac{3}{2} T_2 \ldots = \frac{2n+1}{2} T_2$,

worin T_2 dies zu ω_2 gehörige Umlaufszeit $\left(\text{also } \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}\right)$ ist.

Alle diese Maxima sowohl, wie die Minima, sind unter sich gleich; die Axe der Paraboloide wird sich demnach stets innerhalb eines durch die Maximal- und außerhalb eines durch die Minimal-Abstände gelegten Kreises bewegen.

Ist ω_2 (resp. T_1) ein Vielfaches von ω_1 (resp. T_2), dann wird die Curve schon nach einem Umlauf um den Ursprung geschlossen sein; ist dagegen ω_2 (resp. T_1) $= \left(n + \frac{1}{m}\right) \omega_1$ (resp. T_2), dann wird sie erst nach m Umläufen zum 2. Mal ihre Bahn beginnen.

---

*) In der Astronomie pflegt man diese Curve eine Epicycloide im weiteren Sinne zu nennen.

Um zu untersuchen, ob die Curve concav oder convex gekrümmt ist, haben wir den 2. Differential-Quotienten $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ zu untersuchen.

Wir erhalten folgende Werthe:

$$\xi = A\cos(\omega_1 t) + B\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t\right],\quad \eta = A\sin(\omega_1 t) + B\sin\left[(\omega_1+\omega_2)t\right]$$

worin der Abkürzung wegen für

$$\frac{\omega_2+\omega_3}{\omega_1+\omega_2+\omega_3}$$ die Größe A und für $$\frac{\omega_3}{\omega_1+\omega_2+\omega_3}$$ die Größe B

gesetzt ist, daher

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{A\omega_1\sin(\omega_1 t) + B(\omega_1+\omega_2)\sin\left[(\omega_1+\omega_2)t\right]}{A\omega_1\cos(\omega_1 t) + B(\omega_1+\omega_2)\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t\right]}$$

$$\frac{d\eta^2}{d\xi^2} = -\frac{A\omega_1{}^2\cos(\omega_1 t) + B(\omega_1+\omega_2)^2\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t\right]}{A\omega_1\cos(\omega_1 t) + B(\omega_1+\omega_2)\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t\right]}$$

$$-\frac{\left[A\omega_1\sin(\omega_1 t)+B(\omega_1+\omega_2)\sin\left((\omega_1+\omega_2)t\right)\right]\left[A\omega_1{}^2\sin\omega_1 t + B(\omega_1+\omega_2)^2\sin\left((\omega_1+\omega_2)t\right)\right]}{\left[A\omega_1\cos(\omega_1 t)+B(\omega_1+\omega_2)\cos(\omega_1+\omega_2)t\right]^2}$$

oder soviel als möglich vereinfacht:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{A^2\omega_1{}^3 + B^2(\omega_1+\omega_2)^3 + AB\omega_1(\omega_1+\omega_2)(2\omega_1+\omega_2)\cos(\omega_2 t)}{\left[A\omega_1\cos\omega_1 t + B(\omega_1+\omega_2)\cos(\omega_1+\omega_2)t\right]^2}$$

Ist dieser Werth für den 2. Differentialquotien negativ, dann erhalten wir Concavität der Curve, ist er dagegen positiv, Convexität derselben.

Da aber das Positiv- oder Negativsein des Ausdruckes offenbar nur vom Zähler abhängt, so werden wir nur diesen in Betracht zu ziehen haben.

Setzen wir für A und B die obigen Werthe ein und multipliciren zugleich mit $(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2$, wodurch ebenfalls das Vorzeichen nicht verändert wird, dann haben wir in Bezug auf das Vorzeichen den folgenden Ausdruck zu untersuchen:

$$2)\quad -\left[(\omega_2+\omega_3)^2 R_1{}^2\omega_1{}^3 + \omega_3{}^2 R_2{}^2(\omega_1+\omega_2)^3 + \omega_3(\omega_2+\omega_3)R_1R_2(2\omega_1+\omega_2)\cos(\omega_2 t)\right]$$

Derselbe wird jedenfalls von $\cos(\omega_2 t) = 0$ durch $\cos(\omega_2 t) = 1$, wo ein Maximum stattfindet, bis wieder $\cos(\omega_2 t) = 0$ negativ; daher wird hier die Curve stets concav; ob sie nun auch von $\cos(\omega_2 t) = 0$ durch $\cos(\omega_2 t) = -1$ bis wieder $\cos(\omega_2 t) = 0$ concav ist oder nicht, hängt von den speciellen Werthen von ω_1, ω_2, ω_3, R_1, R_2 ab. Ist der mit cosinus versehene Ausdruck größer als die Summe der beiden Potenzen, dann wird man für den negativen Werth von $\cos(\omega_2 t)$ einen positiven Ausdruck, also Convexität erhalten.

§ 5.

Die Aehnlichkeit der Gleichungen 19) mit denen der Epicycloide läßt uns vermuthen, daß für gewisse Werthe von ω_1, ω_2, ω_3, R_1, R_2 eine Epicycloide entstehe:

Da zur Zeit $t = 0$, also beim Beginne der Rotationen, die Curve eine Maximal-Entfernung vom Ursprung hat, so müssen wir die Gleichungen für die Epicycloide in der Weise aufstellen, daß wir den Lauf des Punktes A während der Wälzung betrachten. (Siehe Fig. 7.)

Aus der Figur 6 ist die folgende Rechnung als richtig erkennbar:

$$\xi = OD - O_2 p.$$

$$\eta = Pp + A^1 p;\ OD = (R + r)\cos\omega_1 t;\ O_2 p = -r\cos(\omega_1 + \omega_2)t;$$

$$Pp = O_2 D = (R + r)\sin\omega_1 t;\ A^1 p = r\sin(\omega_1 + \omega_2)t,$$

mithin die Gleichungen der Epicycloide:

$$(20)\quad \begin{cases} \xi = (R + r)\cos(\omega_1 t) + r\cos\left[(\omega_1 + \omega_2)t\right] \\ \eta = (R + r)\sin(\omega_1 t) + r\sin\left[(\omega_1 + \omega_2)t\right] \end{cases}$$

Dabei findet die Relation statt: $R \,.\, \omega_1 t = r \,.\, \omega_2 t.$

Damit also unsere Curve ξ, η eine Epicycloide werde, muß

$$R + r = \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_1,\ r = \frac{\omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} R_2,\ R = \frac{(\omega_2 + \omega_3) R_1 - \omega_3 R_2}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}$$

und $\left((\omega_2 + \omega_3) R_1 - \omega_3) R_2\right) \omega_1 = \omega_3 R_2 \,.\, \omega_2$ sein, d. h. es muß $\omega_1 (\omega_2 + \omega_3) R_1 = \omega_3 (\omega_2 + \omega_1) R_2$ sein.

Findet zwischen den Geschwindigkeiten und den Abständen der Rotationsaxen diese Bedingung statt, dann hat man die Epicycloide als geometrischen Ort für die Fußpunkte der Paraboloidaxe; findet dagegen diese Bedingung nicht statt, dann wissen wir, daß derselbe immerhin eine in Bezug auf die periodische Annäherung und Entfernung vom Ursprung der Epicycloide ähnliche Curve ist.

Man darf dieselbe als eine **verschlungene** oder auch als eine **gestreckte** Epicycloide bezeichnen, welche zu der gemeinen Epicycloide in derselben Beziehung steht, wie die verschlungene, resp. gestreckte Cycloide zur gemeinen Cycloide.

Während nämlich der Kreis O_1 (Fig. 8) auf dem um O beschriebenen festen Kreise sich abwickelt, also der Punkt B die gemeine Epicycloide beschreibt, wird ein mit O_1 fest verbundener Punkt M_0 eine Curve $M_0 M$ durchlaufen, welche, je nachdem $O_1 M_0 > O_1 B$ oder $O_1 M_0 < O_1 B$ ist, entweder Verschlingungen darbietet oder eine der gestreckten Cycloide ähnliche Gestalt erhält.

Für die Coordinaten $OP = \xi$ und $PM = \eta$ des beschreibenden Punktes bestehen alsdann, wenn $O_1 M_0 = a$ gesetzt wird, die Relationen:

$$\xi = (R + r)\cos\omega_1 t + a\cos(\omega_1 + \omega_2)t,$$

$$\eta = (R + r)\sin\omega_1 t + a\sin(\omega_1 + \omega_2)t,$$

und es lassen sich die drei Constanten R, r, a so bestimmen, daß das System vorstehender Gleichungen identisch mit (19) wird, und zugleich die Bedingung einer epicycloidischen Bewegung, nämlich $R\omega_1 = r\omega_2$ erfüllt ist.

Diese Gleichung läßt sich auch als speciellen Fall der von Prof. Dr. Melde in seiner „Lehre von den Schwingungscurven" aufgestellten und untersuchten Gleichung für die durch 2 elliptische Bewegungen entstehende Schwingungscurve betrachten.

Die betreffende Gleichung heißt:

$$x = A\cos 2m\pi t + C\cos 2n\pi(t + \vartheta)$$

$$y = B\sin 2n\pi t + D\sin 2n\pi(t + \vartheta)$$

Darin bedeuten A und B, C und D die Maximal-Verschiebungen der mit ihrem Endpunkte die elliptischen Bewegungen bewirkenden Stahldräthe des Kaleidophons vom Vibrationsmittelpunkte; m und n die den beiden elliptischen Bewegungen zugehörigen Schwingungszahlen, t die Zeit und ϑ die Phasendifferenz. Sieht man von der Phasendifferenz ab, d. h. läßt man die Schwingung gleichzeitig beginnen und läßt man die elliptischen Bewegungen in kreisförmige übergehen, dann hat man $\vartheta = 0$, $A = B$, $C = D$ zu setzen und die Gleichung nimmt jetzt die Form an:

$$x = A\cos 2m\pi t + C\cos 2m\pi t$$

$$y = A\sin 2m\pi t + C\sin 2m\pi t,$$

welche offenbar mit Gleichung (19) identisch ist.

Es wird demnach die von der Paraboloidaxe durchlaufene Curve gleich einer durch 2 kreisförmige Bewegungen erzeugten Schwingungscurve sein und Aehnlichkeit mit denen auf Taf. XI des Atlases zur Lehre von den Schwingungscurven construirten haben.

§ 6.

Bei 4 Umdrehungen erhalten wir

$$\xi = \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)^2}\Big[(\omega_2+\omega_3+\omega_4)R_1\cos(\omega_1 t)+(\omega_3+\omega_4)R_2\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t\right] + \omega_4 R_3 \cos\left[(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t\right]\Big]$$

$$\eta = \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)^2}\Big[(\omega_2+\omega_3+\omega_4)R_1\sin(\omega_1 t)+(\omega_3+\omega_4)R_2\sin\left[(\omega_1+\omega_2)t\right] + \omega_4 R_3 \sin\left[(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t\right]\Big]$$

Mithin $\xi^2 + \eta^2 = u^2 =$

$$\frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)^2}\Big[(\omega_2+\omega_3+\omega_4)^2 R_1^2+(\omega_3+\omega_4)^2 R_2^2+\omega_4^2 R_3^2 + 2(\omega_2+\omega_3+\omega_4)(\omega_3+\omega_4) R_1 R_2 \cos(\omega_2 t)+2(\omega_2+\omega_3+\omega_4)\omega_4 R_1 R_3 \cos\left[(\omega_2+\omega_3)t\right] + 2(\omega_3+\omega_4)\omega_4 R_2 R_3 \cos(\omega_3 t)\Big]$$

Diese Curve nähert und entfernt sich ebenfalls periodisch an den und von dem Ursprung; jetzt hängt jedoch die Periodicität nicht mehr von ω_2 allein, sondern auch noch von ω_3 ab.

Allgemein wird die durch ξ und η dargestellte Curve eine periodisch dem Ursprung sich nähernde und von demselben sich entfernende sein, und zwar wird die Periodicität von allen außer der an der ersten und letzten Rotationsaxe wirkenden Winkelgeschwindigkeit abhängen.

§ 7.

Wenden wir uns jetzt zu der Betrachtung der in der allgemeinen Gleichung B_s vorkommenden Größe c.

Da die in dem Cylinder vorhandene Flüssigkeit oft nur dazu ausreichen wird, um mit ihrer freien Oberfläche einen verhältnißmäßig kleinen Theil eines Rotationsparaboloides darzustellen, so wird man sich dasselbe in Gedanken ergänzen und den etwa außerhalb des Cylinders fallenden Scheitel als wirklich vorhanden annehmen können.

Um die Größe von c zu bestimmen, denken wir uns in der Höhe von c über der XY Ebene eine hierzu || Ebene $X^{11}O^{11}Y^{11}$, dann wird zwischen XOY und $X^{11}O^{11}Y^{11}$ das cylindrische Gefäß, dessen Durchmesser $= 2f$ sei, vollständig mit Flüssigkeit ausgefüllt sein. Die darin vorhandene Flüssigkeit hat demnach das Volumen

$$V^1 = f^2 \pi c \ldots\ldots \text{(21}$$

Um ferner auch dasjenige Volumen V^{11} zu bestimmen, welches über der Ebene $X^{11}O^{11}Y^{11}$ liegt, nehmen wir ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen XY Ebene mit der Ebene $X^{11}O^{11}Y^{11}$ zusammenfällt, nehmen jedoch zur Richtung der XAxe die Verbindungslinie der Axe des Paraboloides und der Axe des Cylinders an. Die Größe dieser Verbindungslinie sei e. (Fig. 7.)

Die Gleichung des Cylinders auf dieses System bezogen lautet:

$$22)\quad \left\{\begin{array}{l}(x_{11}-e)^2 + y_{11}^2 = f^2 \ldots\ldots \\ \text{und die des Paraboloides:} \\ x_{11}^2 + y_{11}^2 = \dfrac{2g}{(\Sigma\omega)^2} z \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{(22}$$

Schneiden wir nun den Cylinder und das Paraboloid durch eine unserer XZ Ebene || Ebene im Abstand $y_{11} = \alpha$, dann erhalten wir etwa den Schnitt ACNDQ, welcher durch die im Cylinder enthaltene Flüssigkeit vom Volumen V^{11} geht.

Denken wir uns nun den Schnitt vom Abstand $y_{11} = \alpha = 0$ bis $y_{11} = \alpha = f$ parallel mit sich

selbst fortgerückt, und nennen wir in einem solchen die Abscissen der Durchschnittspunkte A und D (also Cq und q^1N) resp. $x_{11}{}^1$ und $x_{11}{}^{11}$, so sehen wir, daß das Volumen V^{11} vorgestellt wird durch die Formel:

$$23) \quad V^{11} = 2\int_0^f \int_{x_{11}{}^{11}}^{x_{11}{}^1} z\,dx_{11}\,.\,dy_{11} \quad \ldots\ldots \quad (23$$

Die Gleichung des Cylinderschnittes || der $X_{11}Z$ Ebene im Abstand $y_{11} = \alpha$ ist:

$$24_a) \quad (x_{11} - e)^2 + \alpha^2 = f^2 \quad \text{(vergl. 22)}$$

und die des Paraboloides in demselben Abstande;

$$24_b) \quad x_{11}{}^2 + \alpha^2 = \frac{2g}{(\Sigma\omega)^2}\, z \quad \ldots\ldots \quad (24$$

Aus 24_a) folgt $x_{11}{}^1 = e + \sqrt{f^2 - \alpha^2}$; $x_{11}{}^{11} = e - \sqrt{f^2 - \alpha^2}$;

aus 24_b) folgt $z = \dfrac{(x_{11}{}^2 + \alpha^2)\,(\Sigma\omega)^2}{2g}$

Daher $\displaystyle\int z\,d\,x_{11} = \frac{(\Sigma\omega)^2}{2g}\int x_{11}{}^2 dx_{11} + \frac{\alpha^2(\Sigma\omega)^2}{2g}\int dx_{11} = \frac{(\Sigma\omega)^2 x_{11}}{6g} + \frac{\alpha^2(\Sigma\omega)^2}{2g}$,

$$\int_{x_{11}{}^{11}}^{x_{11}{}^1} z\,dx_{11} = \frac{(\Sigma\omega)^2}{3g}\,(3e^2 + f^2)\sqrt{f^2 - \alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{(\Sigma\omega)^2\alpha^2}{g}\,\sqrt{f^2 - \alpha^2}$$

Daher $\displaystyle V^{11} = \frac{2}{3g}\,(\Sigma\omega)^2\,(3\,e^2 + f^2)\int_0^f \sqrt{f^2 - y_{11}{}^2}\,dy_{11} + \frac{4}{3g}(\Sigma\omega)^2\int y_{11}{}^2\sqrt{f^2 - y_{11}{}^2}\,dy_{11}$

Es ist aber $\displaystyle\int_0^f \sqrt{f^2 - y_{11}{}^2}\,d\,y_{11} = \frac{f^2}{2}\,\text{arc sin } 1 = f^2\,\frac{\pi}{4}$

und $\displaystyle\int_0^f y_{11}{}^2\,\sqrt{f^2 - y_{11}{}^2}\,d\,y_{11} = \frac{1}{4}\,f^2\int_0^f \sqrt{f^2 - y_{11}{}^2}\,d\,y_{11} = \frac{1}{4}\,f^4\,\frac{\pi}{4}$

$$25) \quad \text{Mithin } V^{11} = \frac{(\Sigma\omega)^2 f^2}{2g}\,(e^2 + \frac{1}{2}\,f^2)\,\pi \quad \ldots \quad (25$$

Da nun das ganze Volumen der Flüssigkeit $V_0 = V^1 + V^{11}$ ist, so haben wir mit Rücksicht auf 21 und 25

$$26) \quad V_0 = \pi f^2 \left[c + \frac{(2e^2 + f^2)\,(\Sigma\omega)^2}{4g}\right].$$

Das Volumen V_0 bleibt unter allen Umständen dasselbe, indem es stets gleich dem Volumen der Flüssigkeit im Zustande der Ruhe ist.

Gesetzt nun, die Flüssigkeitsschicht, deren Niveaufläche wir betrachten, habe vor Beginn der Drehung den Cylinder bis zur Höhe h angefüllt, dann ist $27) \quad V = f^2\,\pi\,h \quad \ldots \quad (27$

Aus 26) und 27) folgt dann $28) \quad c = h - \dfrac{2e^2 + f^2}{4g}\,(\Sigma\omega)^2 \quad \ldots \quad (28$

Hiervon bedeutet h die Höhe der Flüssigkeitsschicht im Zustande der Ruhe, 2f die Weite des Cylinders, e die Entfernung der Axe des Cylinders von der Axe des Paraboloides.

Nennen wir nun die Coordinaten des Fußpunktes der Axe des Cylinders x_{n-1}, y_{n-1}, dann haben wir

$$m \begin{cases} x_{n-1} = R_1 \cos(\omega_1 t) + R_{11} \cos\left[(\omega_1 + \omega_2)\,t\right] + \ldots\ldots + R_{n-1} \cos\left[(\omega_1 + \omega_2 + \ldots \omega_{n-1})\,t\right] \\ y_{n-1} = R_1 \sin(\omega_1 t) + R_{11} \sin\left[(\omega_1 + \omega_2)\,t\right] + \ldots\ldots + R_{n-1} \sin\left[(\omega_1 + \omega_2 + \ldots \omega_{n-1})\,t\right] \end{cases}$$

wie leicht aus Figur 5 an dem speciellen Fall $x_4 = O_1N$; $y_4 = O_4N$ zu erkennen ist.

Demnach wird $e^2 = \left(x_{n-1} - \xi\right)^2 + \left(y_{n-1} - \eta\right)^2$ (ξ und η aus A_1)

$$e^2 = \begin{cases} \frac{1}{(\Sigma\omega)^2}\left[\omega_1 R_1 \cos(\omega_1 t) + (\omega_1 + \omega_2) R_2 \cos\left[(\omega_1 + \omega_2) t\right] + \ldots\ldots\right. \\ \left. \ldots + \left(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots \omega_{n-1}\right) R_{n-1} \cos\left[\left(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots\omega_{n-1}\right)t\right]\right]^2 \\ + \frac{1}{(\Sigma\omega)^2}\left[\omega_1 R_1 \sin(\omega_1 t) + (\omega_1 + \omega_2) R_2 \sin\left[(\omega_1 + \omega_2) t\right] + \ldots\ldots\ldots\right. \\ \left. \ldots\ldots + \left(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots \omega_{n-1}\right) R_{n-1} \sin\left[\left(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots\omega_{n-1}\right)t\right]\right]^2 \end{cases}$$

oder wenn wir unter $\left(\omega_\gamma\right)$ die Summe $\omega_1 + \omega_2 + \ldots\ldots \omega_\gamma$ verstehen:

$$\odot\ e^2 = \frac{1}{(\Sigma\omega)^2}\left[\left[\Sigma\left(\left(\omega_{n-1}\right) R_{n-1} \cos\left(\left(\omega_{n-1}\right) t\right)\right)\right]^2 + \left[\Sigma\left(\left(\omega_{n-1}\right) R_{n-1} \sin\left(\left(\omega_{n-1}\right) t\right)\right)\right]^2\right]$$

Durch Substitution dieses Werthes in 28 erhalten wir:

$$B_b) \ldots c = h - \frac{1}{2g}\left[\left[\Sigma\left(\left(\omega_{n-1}\right) R_{n-1} \cos\left(\left(\omega_{n-1}\right) t\right)\right)\right]^2 + \left[\Sigma\left(\left(\omega_{n-1}\right) R_{n-1} \sin\left(\left(\omega_{n-1}\right) t\right)\right)\right]^2\right] - \frac{f^2 (\Sigma\omega)^2}{4g}$$

Da sich nun das in Gleichung B_a vorkommende c als eine Function von t herausgestellt hat*), so schließen wir daraus Folgendes:

*) Dimensionen von c.

	Maßeneinheit	Längeneinheit	Zeiteinheit	
h	0	1	0	
g	0	1	− 2	
ω	0	0	− 1	
$(\Sigma\omega)^2$	0	0	− 2	
$R \cos \omega t$	0	1	0	
$\omega R \cos(\omega t)$	0	1	− 1	
$\left[\Sigma\left(\omega R \cos(\omega t)\right)\right]^2$	0	2	− 2	
$\frac{\left[\Sigma\left(\omega R \cos(\omega t)\right)\right]^2}{g}$	0	1	0	
ebenso $\left[\Sigma(\omega R \sin \omega t)\right]^2$	0	1	0	
f	0	1	0	
f^2	0	2	0	
$\frac{f^2 (\Sigma\omega)^2}{g}$	0	1	0	
Mithin c	0	1	0	also eine Länge.

Der Scheitel des Rotationsparaboloides wird im Allgemeinen nicht immer die gleiche Höhe über der Bodenfläche der Flüssigkeit behalten, sondern wie die Beschaffenheit der F(t) angiebt, bald steigen, bald fallen.

Da sich diese durch (B_b) dargestellte Function allgemein nicht betrachten läßt, wollen wir wieder für n bestimmte Werthe annehmen:

Für $n = 1$, also bei einer Rotation um eine Axe, wird $n - 1 = o$, daher

$$c = h - \frac{f^2 \omega_1^2}{4g}$$

D. h. Bei einer Rotation um eine Axe ist die Höhe des Scheitels des Rotationsparaboloides über der Bodenfläche unveränderlich.

Bei der der freien Oberfläche, die im Zustande der Ruhe die Höhe $h = h_0$ haben mag, zugehörigen Niveaufläche haben wir:

$$(29) \quad c_0 = h_0 - \frac{\omega_1^2 f^2}{4g}$$

Für den Stand dieses Paraboloides, d. h. für den Durchschnitt desselben mit dem Cylinder, haben wir

$$x^2 + y^2 = f^2$$

Daher wird nach B_a)

$$f^2 - \frac{2g}{\omega_1^2}(z - c_0) = o \text{ oder } z = c_0 + \frac{\omega^2 f^2}{2g}$$

D. h. Die Höhe H dieses Paraboloides wird angegeben durch $H = \frac{\omega^2 f^2}{2g}$.

Setzen wir diesen Werth in (29), so wird $c_0 = h_0 - \frac{1}{2} H$

D. h. Der Scheitel des die freie Oberfläche bildenden Rotationsparaboloides liegt ebenso tief unter der anfänglichen Niveaufläche (h_0) als der Rand über derselben.

Nehmen wir 2 Drehungen an, dann wird $n - 1 = 1$

$$\text{Daher } c = h - \frac{1}{2g} R^1 \left(\overline{\cos(\omega_1 t)^2} + \overline{\sin(\omega_1 t)^2} \right) - \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{4g} f^2$$

$$= h - \frac{1}{2g} R_1 - \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{4g} f^2$$

D. h. Der Scheitel des Paraboloides ist ebenfalls unabhängig von t, befindet sich also stets in derselben Höhe über der Bodenfläche der Flüssigkeit.

Für 3 Umdrehungen hat man:

$$c = h - \frac{1}{2g} \left[\omega_1 R_1 \cos(\omega_1 t) + (\omega_1 + \omega_2) R_2 \cos\left((\omega_1 + \omega_2) t\right) \right]^2$$

$$- \frac{1}{2g} \left[\omega_1 R_1 \sin(\omega_1 t) + (\omega_1 + \omega_2) R_2 \sin\left((\omega_1 + \omega_2) t\right) \right]^2$$

$$- \frac{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 f^2}{4g}$$

$$\text{daher } c = \begin{cases} h - \frac{1}{2g} \left[\omega_1^2 R_1^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 R_2^2 + 2\omega_1 (\omega_1 + \omega_2) R_1 R_2 \cos(\omega_2 t) \right] \\ - \frac{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 f^2}{4g} \end{cases}$$

D. h. Für eine Rotation um 3 || Axen nimmt die Höhe des Scheitels des Paraboloides periodisch zu und ab, und zwar richtet sich die Periodicität nach der 2. Umdrehungsgeschwindigkeit ω_2.

Ist wieder wie oben $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ dann erhält man ein Maximum der Höhe zur Zeit $t = \frac{1}{2}T_2 = \frac{3}{2}T_2 = \frac{5}{2}T_2$ ꝛc. und ein Minimum zur Zeit $t = T_2 = 2T_2 = 3T_2$ ꝛc.

Vergleicht man diese Werthe mit den unter h (nach 19) aufgestellten, dann sieht man die Richtigkeit des folgenden Schlusses ein:

Der Scheitel des Paraboloides erreicht seine größte Höhe über der Bodenfläche, wenn sich die Axe desselben der ersten Drehungsaxe (z Axe) am meisten genähert, und umgekehrt seine geringste Höhe, wenn sie sich am weitesten von derselben entfernt hat.

Auch hier, für die Höhe des Scheitels sind alle Maxima und Minima unter sich gleich.

Für 4 Umdrehungen haben wir:

$$c = h - \frac{1}{2g}\Big[\omega_1 R_1 \cos(\omega_1 t) + (\omega_1+\omega_2) R_2 \cos\big((\omega_1+\omega_2)t\big) + (\omega_1+\omega_2+\omega_3) R_3 \cos\big((\omega_1+\omega_2+\omega_3)t\big)\Big]^2$$
$$- \frac{1}{2g}\Big[\omega_1 R_1 \sin(\omega_1 t) + (\omega_1+\omega_2) R_2 \sin\big((\omega_1+\omega_2)t\big) + (\omega_1+\omega_2+\omega_3) R_3 \sin\big((\omega_1+\omega_2+\omega_3)t\big)\Big]^2$$
$$- \frac{(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)^2 f^2}{4g}$$

oder entwickelt:

$$c = h - \frac{1}{2g}\Big[\omega_1^2 R_1^2 + (\omega_1+\omega_2)^2 R_2^2 + (\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2 R_3^2 + 2\omega_1(\omega_1+\omega_2) R_1 R_2 \cos(\omega_2 t)$$
$$+ 2\omega_1(\omega_1+\omega_2+\omega_3) R_1 R_3 \cos\big((\omega_2+\omega_3)t\big) + 2(\omega_2+\omega_3)\omega_3 R_2 R_3 \cos(\omega_3 t)\Big]$$
$$- \frac{(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4) f^2}{4g}$$

D. h. Bei 4 Umdrehungen hängt die Periodicität des Steigens und Fallens des Scheitels von den Winkelgeschwindigkeiten ω_2 und ω_3 ab.

Wir schließen daraus:

Daß im Allgemeinen auf das Steigen und Fallen des Rotationsparaboloid-Scheitels während seiner Wanderung die erste und letzte Umdrehungsgeschwindigkeit keinen Einfluß ausübt.

§ 8.

Es bleibt uns nun noch übrig, einige Betrachtungen über den in der Flüssigkeit stattfindenden hydrostatischen Druck anzustellen.

In Betreff dieses Druckes p gilt die folgende Gleichung:

$$p = \text{Const.} + \varrho \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Für den hierin vorkommenden Integral-Ausdruck haben wir unter A_1) den Werth angegeben. Wenden wir denselben hier an, so haben wir:

$$p = \text{Const.} + \varrho \frac{(\Sigma\omega)^2}{2}\left[x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y - \frac{2gz}{(\Sigma\omega)^2}\right]$$

oder mit Rücksicht auf A_2 und 18)

$$p = \text{Const.} - \varrho g c - \varrho(\Sigma\omega)^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Wenn wir nun auch für c aus 28 den Werth einsetzen, wird p dargestellt als F (e, ξ, η), und da diese 3 Größen in ⊙ (nach 28) und A_1 als F(t) angegeben sind, haben wir auch p als F(t), nämlich:

$$30) \quad \ldots\ldots p = \text{Const.} - \varrho g h + \varrho (\Sigma\omega)^2 \left[\frac{2e^2+f^2}{4g} (\xi^2+\eta^2)\right]$$

Wenn wir nun bedenken, daß auf der freien Oberfläche nur der Druck der Atmosphäre liegt, dessen Größe auf die Flächeneinheit bezogen uns der Barometerstand angiebt, und den wir mit B bezeichnen wollen, dann haben wir für die freie Oberfläche.

$$B = \text{Const.} - \varrho g h_0 + \varrho (\Sigma\omega)^2 \left[\frac{2e^2+f^2}{4g} - (\xi^2+\eta^2)\right]$$

$$\text{d. h. Const.} = B + \varrho g h_0 - \varrho (\Sigma\omega)^2 \left[\frac{2e^2+f^2}{4g} - (\xi^2+\eta^2)\right]$$

Setzen wir diesen Werth in 30 ein, dann erhalten wir:

$$p = B + \varrho g (h_0 - h).$$

Diese Formel lehrt uns, **daß der Druck in der Flüssigkeit mit der Tiefe zunimmt, grade wie bei einem vollständig mit Flüssigkeit angefüllten Gefäße.**

§ 9.

Wir wollen nun in Erwägung ziehen, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn die Drehungen nicht wie die Zeiger einer Uhr, wie wir bisher angenommen haben, sondern **entgegengesetzt** und in verschiedenem Sinne stattfinden.

Um anzuzeigen, daß eine Drehung nicht von links nach rechts, sondern umgekehrt von rechts nach links stattfinde, brauchen wir nur statt des betreffenden ω den Werth −ω in unsere Formeln einzusetzen. Nehmen wir alle ω negativ an, d. h. lassen wir alle Drehungen nach links vor sich gehen, dann sehen wir, daß sich dadurch unsere Gleichung B_a nicht ändert, daß also die Gestalt des Paraboloides unverändert bleibt; auch auf die Gestalt der Curve F(ξ, η) hat dies weiter keinen Einfluß, als daß sich ihre Anfangs-Richtung nicht der + Y-, sondern der −Y-Axe zuwendet; ebenso bleibt der Werth von c unverändert, d. h. der Scheitel des Paraboloides hat zu gleichen Zeiten dieselbe Höhe über der Bodenfläche, wie bei den positiven Winkelgeschwindigkeiten.

Nehmen wir dagegen Drehungen in verschiedenem Sinne vor, so wird dadurch sowohl die Gestalt, als auch der Weg des Paraboloides wesentlich verändert, ja sogar wird in dem Fall, daß die Summe der Winkelgeschwindigkeiten nach der einen Seite gleich der Summe der Winkelgeschwindigkeiten nach der anderen Seite ist, d. h. für den Fall $\Sigma\omega = 0$, kein Rotationsparaboloid mehr entstehen; denn sowohl ξ als η werden für diesen Werth ∞, d. h. die Axe des Paraboloides rückt in das Unendliche, oder m. a. W. es ist kein Paraboloid vorhanden. Die Coordinaten x und y erhalten in diesem Fall nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn der Ausdruck $\frac{2g(z-c)}{(\Sigma\omega)^2} = \frac{0}{0}$ ist, d. h. wenn . z = c wird.

Ist nun der Nullwerth des Σω dadurch entstanden, daß bei einer graden Zahl von Drehungen die folgende Winkelgeschwindigkeit stets der vorhergehenden gleich und entgegengesetzt ist, und ist außerdem $R_1 = R_2 = R_3 \ldots = R_{n-1}$ dann erhalten wir aus B_b)

$$c = h$$

daher z = c = h.

Die Niveaufläche ist also in diesem Fall eine mit der XY Ebene || Ebene. Die Gestalt der Flüssigkeit wird mithin durch die verschiedenen Drehungen nicht verändert.

§ 10.

Wir wollen von den Fällen, wo die Drehungen im verschiedenen Sinne vor sich gehen, nur einige specielle in Betracht ziehen. Nehmen wir bei 2 Drehungen die 2. als der ersten entgegengesetzt an, dann erhalten wir

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{\omega_1 - \omega_2}(z - c) = o.$$

$$c = h - \frac{1}{2g} R_1 - \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4g} f^2$$

$$u^2 = \frac{(\omega_2)^2 R_1^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2}$$

Es entsteht in diesem Falle ebenfalls ein Paraboloid, dessen Axe parallel den beiden Rotationsaxen auf einem Kreis um den Ursprung der Coordinaten läuft und dessen Scheitel stets in gleicher Höhe über der Bodenfläche bleibt; aber Parameter, Kreis und Höhe sind von den früheren, bei nur positiven Drehungen vorkommenden, verschieden.

Bei 3 Drehungen wollen wir nur den Fall betrachten, wo $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ und ω_1 positiv, ω_2 und ω_3 negativ ist, dann haben wir:

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{(\omega_3 + \omega_2 - \omega_1)^2}(z - c) = o$$

(31

$$\xi = \frac{1}{\omega_3 + \omega_2 - \omega_1}\left[(\omega_2 + \omega_3) R_1 \cos(\omega_1 t) + \omega_3 R_2 \cos\left((\omega_2 - \omega_1) t\right)\right]$$

$$\eta = \frac{1}{\omega_3 + \omega_2 - \omega_1}\left[(\omega_2 + \omega_3) R_1 \sin(\omega_1 t) - \omega_3 R_2 \sin(\omega_2 - \omega_1) t\right]$$

$$u^2 = \frac{1}{(\omega_3 + \omega_2 - \omega_1)^2}\left[(\omega_2 + \omega_3)^2 R_1^2 + \omega_3^2 R_2^2 + 2(\omega_2 + \omega_3)\omega_3 R_2 \cos(\omega_2 t)\right]$$

$$c = h - \frac{1}{2g}\left[\omega_1^2 R_1^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 R_2^2 - 2\omega_1(\omega_2 - \omega_1) R_1 R_2 \cos(\omega_2 t)\right] - \frac{f^2(\omega_3 + \omega_2 - \omega_1)^2}{4g}$$

Diese Fläche bildet also ebenfalls ein Paraboloid, dessen Axe || den Rotationsaxen auf einer Curve läuft, die sich der ersten Umdrehungsaxe periodisch nähert und die zur Zeit $t = o = T_2 = 2T_2 \ldots = n T_2$ das Maximum und zur Zeit $t = \frac{1}{2} T_2 = \frac{3}{2} T_2 \ldots = \frac{2n+1}{2} T_2$ das Minimum ihrer Annäherung erreicht.

Setzen wir in den Werth 4 (nach 19) $-\omega_2$, $-\omega_3$ statt ω_2 und ω_3, dann erhalten wir zur Bestimmung der Concavität oder Convexität die Formel:

$$-\left[(\omega_3 + \omega_2)^2 \omega_1^3 R_1^2 - \omega_3^2 (\omega_2 - \omega_1)^3 R_2^2 - \omega_3(\omega_2 + \omega_3)(2\omega_1 - \omega_2) \cos(\omega_2 t)\right]$$

Dieser Ausdruck kann je nach der Beschaffenheit von ω_3, ω_2, ω_1 für alle Werthe von t positiv werden. D. h. die Curve kann ganz convex sein, was bei lauter positiven Drehungen nicht der Fall war.

Der Scheitel des Paraboloides erhält zur Zeit $t = o = T_2 = 2\,T_2 \ldots = n\,T_2$ das Maximum und zur Zeit $t = \frac{1}{2}\,T_2 = \frac{3}{2}\,T_2 \ldots = \frac{2n+1}{2}\,T_2$ das Minimum des Abstandes von der Bodenfläche; es ist also der Scheitel dann am weitesten von der Bodenfläche entfernt, wenn die Paraboloid-Axe am weitesten von der ersten Umdrehungsaxe (Z Axe) entfernt ist und umgekehrt.

Um zu untersuchen für welche Werthe von ω_1, ω_2, ω_3, R_1, R_2 die Curve $F(\xi, \eta)$ in die Hypocycloide übergeht, haben wir, da zur Zeit $t = o$ ein Maximum der Entfernung von O_1 (Fig. 10) vorhanden ist, den Lauf des Punktes A zu verfolgen.

Wir erhalten $\xi = O_1 Q + A^1 B$

$$\eta = O_2 Q - O_2 B$$

$$\xi = (R - r)\cos(\omega^1 t) + r\cos\left[(\omega_2 - \omega_1)\,t\right]$$

$$\eta = (R - r)\sin(\omega_1 t) - r\sin\left[(\omega_2 - \omega_1)\,t\right]$$

und die Relation

$$R\,\omega_1\,t = r\,\omega_2\,t;\quad \frac{R}{r} = \frac{\omega_2}{\omega_1};\quad \frac{R - r}{r} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1}.$$

In unserer Gleichung (31 ist

$$R - r = \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_3 + \omega_2 - \omega_1} R_1,\quad r = \frac{\omega_3}{\omega_3 + \omega_2 - \omega_1} R_2$$

$$\text{daher } \frac{R - r}{r} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{(\omega_2 + \omega_3)\,R_1}{\omega_3\,R_2}$$

(32 $\qquad$ oder $\omega_3\,(\omega_2 - \omega_1)\,R_2 = \omega_1\,(\omega_2 + \omega_3)\,R_1$

als Bedingung für die Hypocycloide.

Setzen wir nun auch noch

$$\omega_2 = 2\,\omega_1,$$

dann erhalten wir mit Rücksicht auf 32 auch noch

$$(\omega_2 + \omega_3)\,R_1 = \omega_3\,R_2.$$

Substituiren wir diese Werthe in Gleichung 31, dann wird

$$\xi = \frac{2\,\omega_3\,R_2}{\omega_3 + \omega_1}\cdot\cos(\omega_1 t)$$

$$\eta = O.$$

D. h. der Scheitel des Rotationsparaboloides bewegt sich in diesem Falle stets über der Abscissenaxe des festen Systems.

Bei diesen Werthen von ω_1, ω_2, ω_3, R_1, R_2 wird

$$c = h - \frac{\omega_1^2}{2g}\left[R_1^2 + R_2^2 - 2\,R_1\,R_2\cos(2\,\omega_1 t)\right] - \frac{(\omega_3 + \omega_1)^2}{4\,g}\,f^2,$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $h - \frac{\omega_1^2}{2\,g}\left[R_1^2 + R_2^2\right] - \frac{(\omega_3 + \omega_1)^2}{4\,g}\,f^2 = A$ und $2\,R_1\,R_2 = B$ setzen:

$$c = A + B\cos(2\,\omega_1 t).$$

Der Scheitel erreicht das Maximum seiner Höhe zur Zeit $t = o = \frac{1}{2} T_1 = \frac{3}{2} T_1 \ldots = \frac{n}{2} T_1$

und das Minimum derselben zur Zeit $t = \frac{1}{4} T_1 = \frac{3}{4} T_1 = \frac{5}{4} T_1 \ldots = \frac{2n+1}{4} T_1$.

D. h. der Scheitel enthält seine größte Höhe über der Bodenfläche am Anfangs- und Endpunkte der von seiner Horizontal-Projection durchlaufenen Bahn und kommt in der Mitte derselben dem Boden am nächsten.

Die vom Scheitel durchlaufene Bahn bildet 2 in der XZ Ebene liegende in der Z Axe mit den einen Endpunkten zusammen stoßende Quadranten, wie die Figur 11 veranschaulicht.

§ 11.

Fassen wir nun kurz die durch die bisherige Untersuchung gewonnenen Resultate zusammen, dann haben wir Folgendes:

Bei der Rotation einer Flüssigkeit um n vertikale Axen entstehen, abgesehen von dem einen Fall, wo die in verschiedenem Sinne thätigen Winkelgeschwindigkeiten sich gegenseitig aufheben, als Niveauflächen einander congruente Rotationsparaboloide, deren Axen den Rotationsaxen parallel sind.

Die Axe dieser Paraboloide fällt bei einer Umdrehung mit der Umdrehungsaxe zusammen, bewegt sich dagegen bei zwei Umdrehungen in einem Kreise und bei mehr als zwei Umdrehungen in einer epi- oder hypocycloidischen Curve um die erste Umdrehungsaxe (Z Axe).

Der Scheitel der Paraboloide behält bei einer und bei zwei Umdrehungen stets denselben Abstand von der Bodenfläche der Flüssigkeit bei, steigt und fällt jedoch im Agemeinen periodisch bei mehr als zwei Umdrehungen.

Auf das Steigen und Fallen des Scheitels hat die erste und letzte Umdrehungsgeschwindigkeit ebensowenig Einfluß, wie auf die Periodicität der Annäherung an den Ursprung von Seiten der von der Axe des Rotationsparaboloides durchlaufenen Curve.

Der in der Flüssigkeit vorhandene Druck nimmt mit der Tiefe zu, grade wie in einem mit Flüssigkeit vollständig angefüllten Gefäße.

§ 12.

Um schließlich ein specielles Beispiel abzuhandeln, geben wir für 3 Umdrehungen den Größen ω_1, ω_2 ω_3 ꝛc. die folgenden bestimmten Werthe: $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = 5\pi$, $\omega_3 = 6\pi$;

$R_1 = 30$ Millimeter, $R_2 = 15$ M., $f = 20$ M., $g = 9809$ M., $h = 80$ M.

Zur Darstellung der von dem Scheitel des Rotationsparaboloides durchlaufenen Bahn haben wir uns die Coordinaten einer Anzahl von Punkten der Curve durch Aufstellung der folgenden Tabelle festzusetzen.

Die Tabelle ist aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{11}{4} \cos \pi t + \frac{3}{4} \cos (6\pi t) \\ \eta &= \frac{11}{4} \sin \pi t + \frac{3}{4} \sin (6\pi t) \end{aligned}\right\} \text{Centimeter.}$$

$$c = (56 - 2{,}7 \cos 5\pi t) \text{ Millimeter}$$

durch Annahme der in der ersten Columme links aufgestellten bestimmten Werthe für t entstanden.

Für t wird	ξ Centimeter	η Centimeter	c Millimeter
0	$3\frac{1}{2}$	0	$56 - 2{,}7$
$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{4} \cos \frac{1}{36}\pi + \frac{3}{4} \cos \frac{6}{36}\pi$	$\frac{11}{4} \sin \frac{1}{36}\pi + \frac{3}{4} \sin \frac{6}{36}\pi$	$56 - 2{,}7 \cos \frac{5}{36}\pi$
$\frac{2}{36}$	$\quad\quad \frac{2}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{12}{36}$	$\quad\quad \frac{2}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{12}{36}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{10}{36}$
$\frac{3}{36}$	$\quad\quad \frac{3}{36}$	$\quad\quad \frac{3}{36} + \quad$	$\quad\quad\quad\quad \frac{15}{36}$
$\frac{4}{36}$	$\quad\quad \frac{4}{36}\pi - \frac{3}{4} \cos \frac{12}{36}\pi$	$\quad\quad \frac{4}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{12}{36}$	$+ \quad\quad \frac{16}{36}$
$\frac{5}{36}$	$\quad\quad \frac{5}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$	$\quad\quad \frac{5}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{11}{36}$
$\frac{6}{36}$	$\quad\quad \frac{6}{36} - \frac{3}{4}$	$\quad\quad \frac{6}{36}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$
$\frac{7}{36}$	$\quad\quad \frac{7}{36} - \frac{3}{4} \cos \frac{6}{36}\pi$	$\quad\quad \frac{7}{36} - \frac{3}{4} \sin \frac{6}{36}\pi$	$\quad\quad\quad\quad \frac{1}{36}$
$\frac{8}{36}$	$\quad\quad \frac{8}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{12}{36}$	$\quad\quad \frac{8}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{12}{36}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{4}{36}$
$\frac{9}{36}$	$\quad\quad \frac{9}{36}$	$\quad\quad \frac{9}{36} - \frac{3}{4}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{9}{36}$
$\frac{10}{36}$	$\quad\quad \frac{10}{36} + \frac{3}{4} \cos \frac{12}{36}\pi$	$\quad\quad \frac{10}{36} - \frac{3}{4} \sin \frac{12}{36}\pi$	$\quad\quad\quad\quad \frac{14}{36}$
$\frac{11}{36}$	$\quad\quad \frac{11}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$	$\quad\quad \frac{11}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$	$- \quad\quad \frac{17}{36}$
$\frac{12}{36}$	$\quad\quad \frac{12}{36} + \frac{3}{4}$	$\quad\quad \frac{12}{36}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{12}{36}$
$\frac{13}{36}$	$\quad\quad \frac{13}{36} + \frac{3}{4} \cos \frac{6}{36}\pi$	$\quad\quad \frac{13}{36} + \frac{3}{4} \sin \frac{6}{36}\pi$	$\quad\quad\quad\quad \frac{7}{36}$
$\frac{14}{36}$	$\quad\quad \frac{14}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{12}{36}$	$\quad\quad \frac{14}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{12}{36}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{2}{36}$
$\frac{15}{36}$	$\quad\quad \frac{15}{36}$	$\quad\quad \frac{15}{36} + \frac{3}{4}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{3}{36}$
$\frac{16}{36}$	$\quad\quad \frac{16}{36} - \frac{3}{4} \cos \frac{12}{36}\pi$	$\quad\quad \frac{16}{36} \quad \frac{3}{4} \sin \frac{12}{36}\pi$	$\quad\quad\quad\quad \frac{8}{36}$
$\frac{17}{36}$	$\quad\quad \frac{17}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$	$\quad\quad \frac{17}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{13}{36}$
$\frac{18}{36}$	$- \frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	56
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{69}{36}$	$-\frac{11}{4} \cos \frac{3}{36}\pi$	$-\frac{11}{4} \sin \frac{3}{36}\pi - \frac{3}{4}$	$56 - 2{,}7 \cos \frac{15}{36}\pi$
$\frac{70}{36}$	$\quad\quad\quad \frac{2}{36} + \frac{3}{4} \cos \frac{12}{36}\pi$	$\quad\quad\quad \frac{2}{36}\pi - \frac{3}{4} \sin \frac{12}{36}\pi$	$\quad\quad\quad\quad \frac{10}{36}$
$\frac{71}{36}$	$\quad\quad\quad \frac{1}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$	$\quad\quad\quad \frac{1}{36} \quad\quad\quad\quad \frac{6}{36}$	$\quad\quad\quad\quad \frac{5}{36}$
$\frac{72}{36}$	$\quad 3\frac{1}{2}$	0	$56 - 2{,}7$

Tragen wir auf den isometrischen Projectionen eines rechtwinklichen Coordinatensystems + X, + Y, — X, — Y + Z die Werthe aus dieser Tabelle in der Weise auf, daß wir die auf

$+ \xi$ sich beziehenden Werthe auf der + X Axe,
$+ \eta$ " " " " " + Y "
$+ \zeta$ " " " " " + Z "

abtragen, wie dies z. B. zur Zeit $t = \frac{18}{36}$ bei A (Fig. 13) geschehen ist, dann erhalten wir durch Verbindung der einzelnen Punkte die isometrische Projection der vom Scheitel des Paraboloides durchlaufenen, doppelt gekrümmten Curve, wie sie uns die Figur zeigt.

Das Paraboloid selbst, etwa in seiner Lage zur Zeit $t = \frac{14}{36}$, erhält man dadurch, daß man die Höhe des Scheitels zu dieser Zeit (wie diese in Fig. 13 bei L sichtbar ist) in Fig. 12 als PP^1 aufträgt, mit dem Parameter = 14 Millimetern eine Parabel construirt, deren Scheitel P und deren Axe die Verlängerung von PP^1 ist, ein rechtwinkliches Coordinatensystem so legt, daß der Fußpunkt p^1 dieser Axe die ihm nach der Tabelle oder nach Fig. 13 zukommenden Coordinaten erhält und zugleich die Horizontalprojection der Axe auf der x Axe $\perp$ steht, und daß man dann mehrere Kreise, welche horizontalen Querschnitten des Paraboloides entsprechen, in der Weise als Vertikalprojectionen darstellt, daß man jedes Mal ihre Durchmesser aus der Horizontalprojection ablest, wie dies Fig. 12 bei AB, A^1B^1 ersichtlich ist.

Nimmt man in diesen Kreisen bestimmte Punkte an (wie z. B. bei A^1), trägt die Abstände von der + X_I- und + Y-Axe, sowie die Höhe A^1A in Fig. 13 auf, so erhält man die Gestalt des Paraboloides um so genauer, je mehr Punkte und Kreise man auf diese Weise bestimmt. In unserer Darstellung sind 6 Kreise und für jeden derselben 12 Punkte aufgetragen und entsprechend mit einander verbunden, wodurch wir die isometrische Projection des Paraboloides erhalten haben.

Den Cylinder stellt man auf ähnliche Weise dar, indem man zunächst in Fig. 12 die Lage des Mittelpunktes des Grundkreises aus $\mathfrak{m}$ (nach 28) bestimmt, um diesen Mittelpunkt mit dem Radius f = 20 Millimeter einen Kreis beschreibt, die Coordinaten mehrerer Punkte dieses Kreises aus Fig. 12 und Fig. 13 und in jedem so erhaltenen Punkte die Höhe des Cylinders aufträgt, wie dies z. B. bei BB^1 (Fig. 13) ersichtlich ist.

Die Durchschnittslinie des Paraboloides und des Cylinders erhält man einfach dadurch, daß man in Fig. 12 die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Paraboloid- und der Cylinderkreise in Fig. 13 einträgt, wie dies z. B. bei den obersten und untersten Durchschnitttspunkten, welche sich in Fig. 12 in ihrer Vertikalprojection als die Berührungspunkte T und D darstellen, in Fig. 13 bei TT^1 und DD^1 veranschaulicht ist.

Durch die Verbindung der durch dieses Verfahren aufgetragenen Punkte erhält man die Durchschnittslinie T E D F. Das im Innern des Cylinders liegende, nicht punktirte, sondern stark gezeichnete Stück T E D F L des Paraboloides giebt dann das zur Zeit $t = \frac{14}{36}$ von der Oberfläche der im Cylinder befindlichen Flüssigkeit gebildete Stück des Paraboloides, welches durch die 3fache Rotation entstanden ist, an.

In Fig. 14 und Fig. 15 ist der deutlicheren Uebersicht wegen noch eine durch eine einfache, sowie ein durch eine 2fache Rotation entstandene oberste Niveaufläche dargestellt.

Fig. 2.

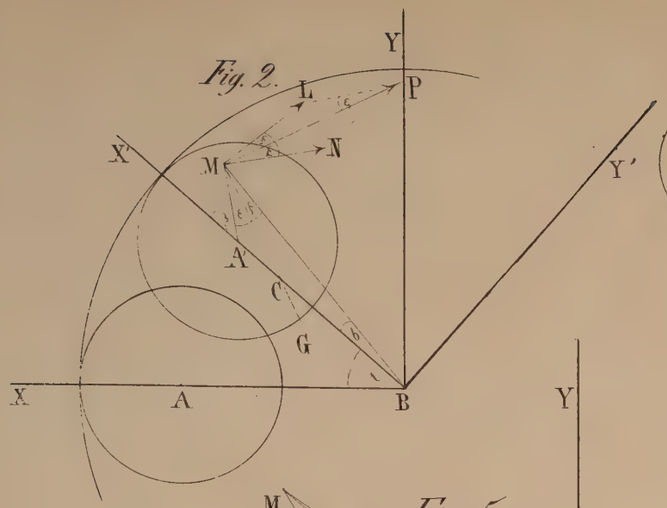

Fig. 3.

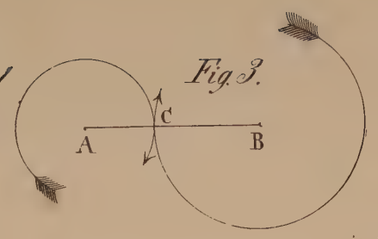

Fig. 4.

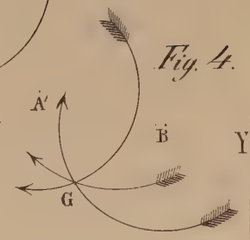

Fig. 5.

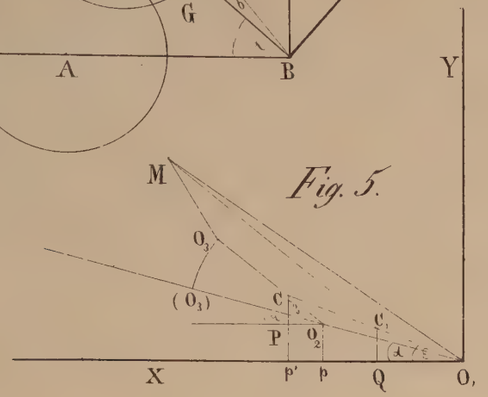

Fig. 6.

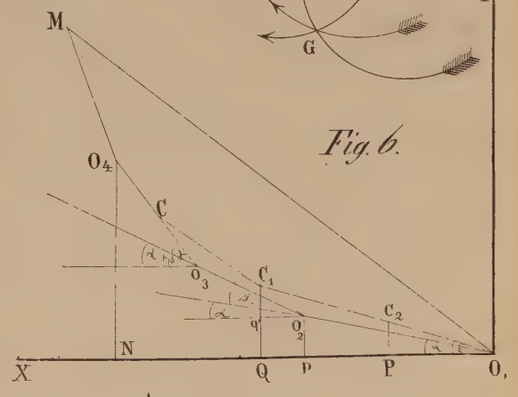

Fig. 7.

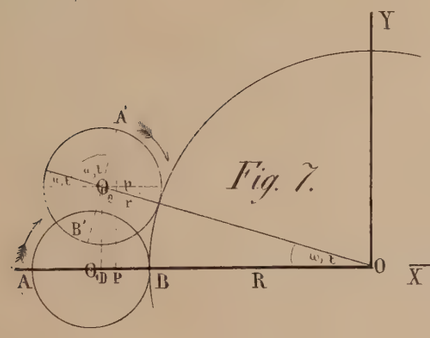

Fig. 8.

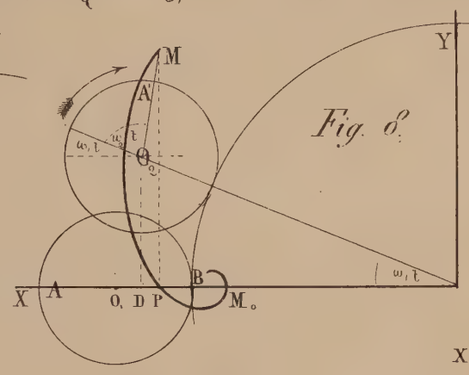

Fig. 9.

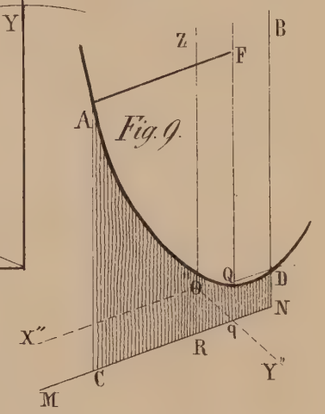

Fig. 10.

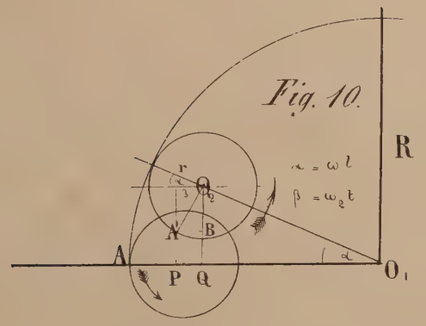

Fig. 11.

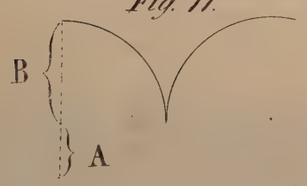

Fig. 1.

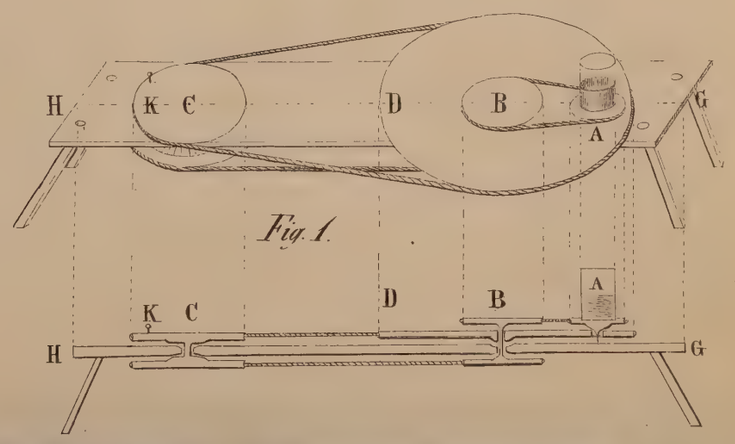

Fig. 14.

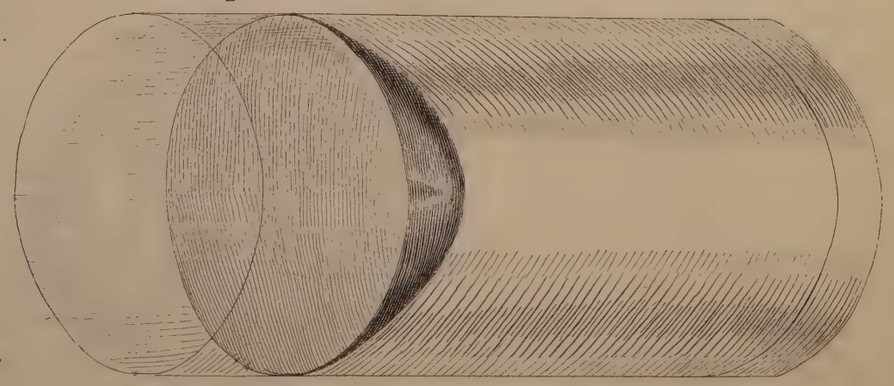

Fig. 12.

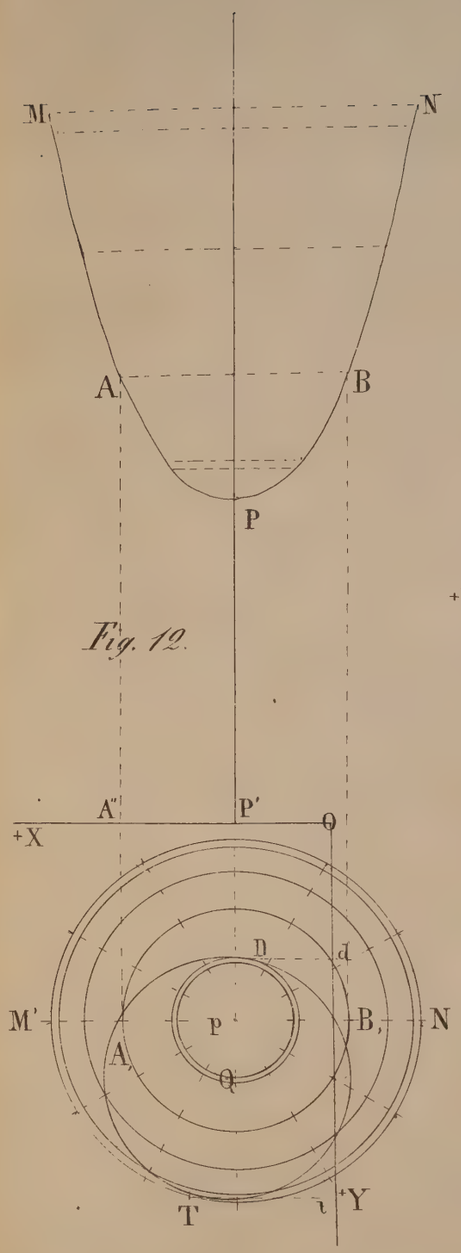

Fig. 13.

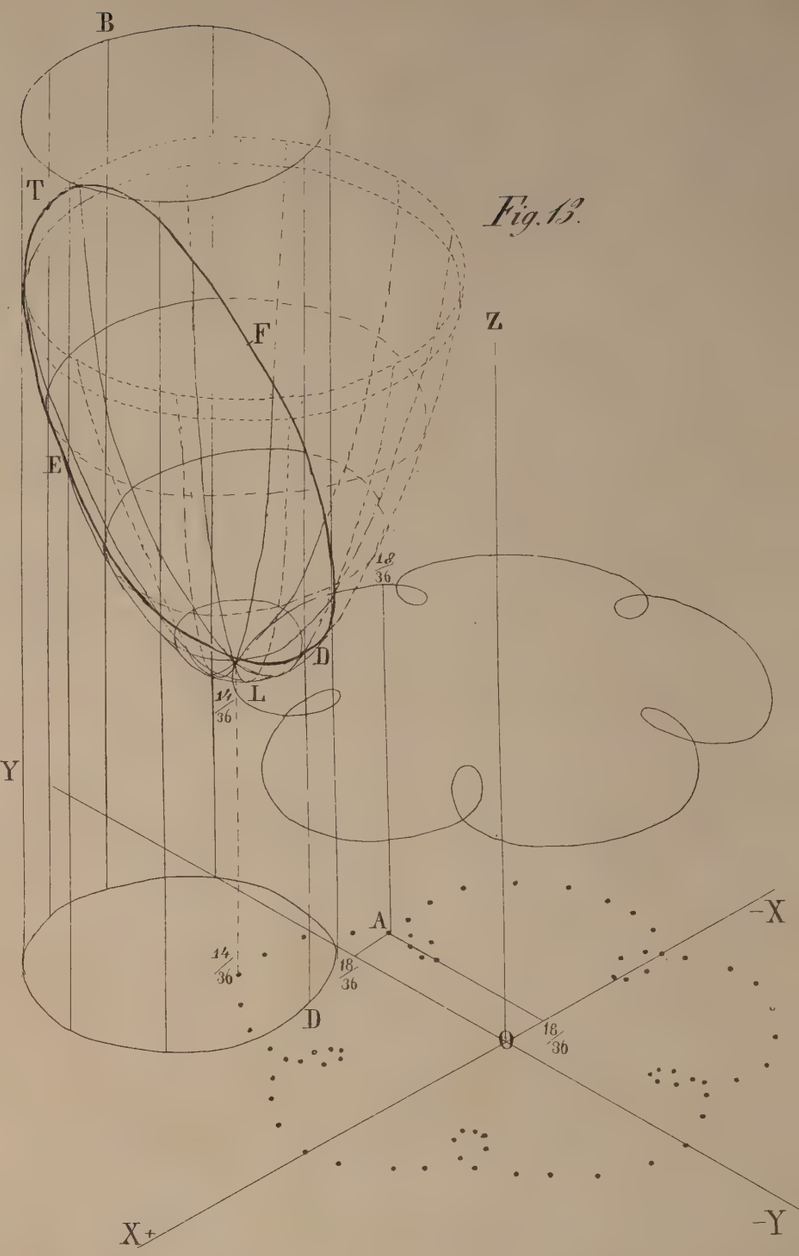
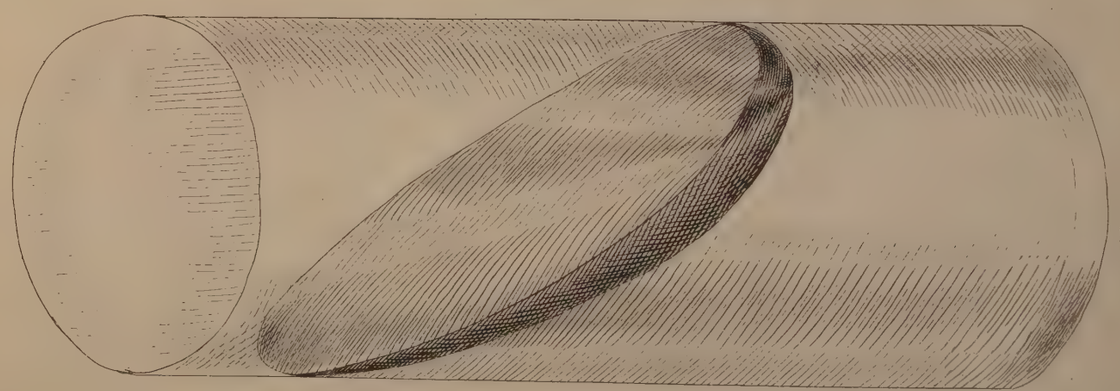
Fig. 15.